SULLE IPOTESI CHE PERMETTONO L'INTRODUZIONE DELLE COORDINATE IN UNA VARIETÀ A PIÙ DIMENSIONI.

Nota di Federigo Enriques, in Bologna.

Adunanze dell'8 e 22 maggio 1898.

È grande merito di Riemann di avere rilevato come i concetti della generale teoria dell'estensione (teoria della connessione o Analysis situs) costituiscano il fondamento di tutte le nozioni geometriche; cosicchè appunto nella teoria dell'estensione hanno origine comune i due grandi indirizzi moderni che conducono a porre i principii della Geometria partendo da una varietà in cui è data una determinazione metrica (Riemann, Helmoltz, Lie, ...) ovvero da uno spazio proiettivo in cui sia fissato un assoluto (Cayley, Klein, ...) (*).

Ma i principii della generale teoria dell'estensione, non sono

(*) Alcuni tentativi recenti che, per varie vie, tendono a stabilire la Geometria proiettiva indipendentemente dai principii generali della teoria dell'estensione (ordine dei punti della retta, continuità, ecc.) inducono sempre più nella convinzione, a cui gia si è portati da ragioni psicologiche, che sia impossibile di riuscirvi; poichè il resultato viene ottenuto soltanto ammettendo come postulati alcune proposizioni (che è più giusto di riguardare come veri e propri teoremi della Geometria proiettiva) prive di qualsiasi evidenza intuitiva.

stati, mi sembra, sufficientemente investigati; anzi nella maggior parte delle moderne e più importanti ricerche sui fondamenti della Geometria, cui si è poc'anzi alluso, si muove senz'altro da una *varietà* i cui punti sieno rappresentati (in modo continuo) mediante coordinate.

Quali sono i postulati che permettono di introdurre le coordinate in una varietà a più dimensioni?

Questo problema (cui accennano il sig. Lie ed il sig. Veronese) non ha ricevuto fino ad oggi alcuna risposta nel campo della pura teoria della estensione.

La generazione di una varietà v_n, ad n dimensioni, indicata dal Riemann [variazione continua di un elemento per generare una v_1 (*), variazione continua di una v_1 per generare una v_2, ecc.] è chiaramente insufficiente per ottenere una rappresentazione continua della v_n sopra una varietà numerica di n numeri, se nella v_1 (e così nella serie delle v_1 generante v_2, ecc.) non si immagina data alcuna determinazione metrica. E, lasciando da parte le varietà v_n per cui sono definite le nozioni metriche (**), la introduzione delle coordinate si effettua oggi soltanto nel caso che la v_n possa considerarsi come uno spazio proiettivo ($n \geqq 3$); il che suppone, p. e., per $n = 3$, l'esistenza di un certo sistema ∞^3 di superficie, laddove, per la generazione di Riemann, interpretata nel modo più largo, sarebbero date in v_3 soltanto tre serie ∞^1 di superficie (cfr. n° 14).

Non è dunque fuor di luogo la presente ricerca. La quale è dedicata quasi esclusivamente al caso delle varietà a due dimensioni o superficie, perchè da questo si passa con facile estensione al caso delle varietà a più dimensioni.

Noi precisiamo i postulati che vengono dati per la superficie, dalla generazione di Riemann, considerando il fascio delle linee mobili generatrici, ed il fascio delle traiettorie dei punti di tali linee. Stabiliamo così, partendo da *due fasci generatori*, la definizione di una superficie (semplicemente connessa ed aperta) considerata in sè

(*) Cfr. la definizione della v_1 al n° 1.

(**) Cfr. per queste: Burkhardt « *Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* » (Göttingen Nachrichten, 1895).

stessa rimpetto alla teoria dell'estensione. E dopo avere definito le linee, unisecanti quelle dei fasci generatori, sopra la superficie, dimostriamo che:

Per ottenere la rappresentazione (continua) dei punti della superficie mediante due coordinate, basta ammettere che sopra di essa esista un terzo fascio di linee, unisecanti le linee dei due fasci generatori.

Il resultato viene quindi esteso alle varietà a 3 dimensioni (vedi n° 14).

1. Occorre prima di tutto che ricordiamo come sia definita la *varietà* v_1 *ad una dimensione, o linea* (considerata in sè stessa). Limitandoci a v_1 aperte (le sole che avremo occasione di considerare) *diremo* v_1 *una classe di elementi alla quale appartengano due ordini continui, senza elementi estremi, l'uno inverso dell'altro.*

La continuità si suppone introdotta col postulato di Dedekind, indipendentemente da ogni determinazione metrica (*).

Allorchè l'elemento di cui si tratta viene designato col nome di «*punto*», la v_1 viene chiamata «*linea*».

Dalla definizione della linea si traggono, come è noto, le elementari proposizioni relative alla *divisione della linea in due parti (o lati) mediante un punto, ai segmenti* ecc.; quindi la nozione di *intorno* di un punto, e di *punto limite* d'un gruppo di punti. Di esse faremo uso, senz'altro, nel seguito.

Ci occorrerà pure di riferirci al concetto di *corrispondenza univoca* fra due linee l, m: corrispondenza per la quale ad ogni punto di l corrisponde *un* punto di m. Se la corrispondenza è univocamente invertibile la diremo *biunivoca*.

Una corrispondenza univoca tra l ed m la diremo *ordinata*, se a punti susseguentisi di l corrispondono punti susseguentisi di m. Sussistono i seguenti teoremi:

I. Se una corrispondenza ordinata tra l ed m è invertibile, per modo che ad ogni punto di m corrisponda qualche punto di l, la sua inversa è certo una corrispondenza univoca (ordinata).

(*) Cfr. p. e. la mia Nota «*Sui fondamenti della Geometria proiettiva*». Rendic. Istituto Lombardo, 1894.

Lasciamo la facile dimostrazione.

Osservazione—Una corrispondenza biunivoca ordinata tra l, m è *continua*, nel senso che ad ogni punto P limite di un gruppo di punti su l, fà corrispondere un punto P' limite del gruppo dei punti corrispondenti su m e viceversa.

II. Se sopra una linea l si ha una corrispondenza biunivoca ordinata, nella quale a due punti A, B corrispondano altri due punti A', B', per modo che B consegua a B' nell'ordine (AA') della linea, la corrispondenza possiede almeno un punto unito.

Questo teorema è in sostanza stabilito nei §§ 10, 11 della citata mia Nota « *Sui fondamenti della Geometria proiettiva* ».

2. Diremo *varietà a due dimensioni* v_2, una classe di elementi la quale contenga due sistemi di v_1, a e b, per modo che:

1) ogni elemento della v_2 appartenga ad una a e ad una b,

2) una a ed una b abbiano sempre comune un elemento (nel quale s'*incontrano*),

3) se a_1, a_2 sono due v_1 del primo sistema, e si considerano più elementi susseguentisi di a_1 e le b che li contengono, queste incontrano a_2 secondo tanti elementi susseguentisi; ed analogamente si dica per due b.

Se l'elemento di cui si parla viene designato col nome di « *punto* », e quindi le v_1, a e b col nome di « *linee* », la v_2 verrà designata col nome di *superficie* (semplicemente connessa ed aperta), e potrà essere indicata con F.

Per le ipotesi poste, le linee b (e così pure le a), di cui il sistema per la condizione 1) prende il nome di *fascio*, possono essere ordinate in due modi continui l'uno inverso dell'altro secondo l'ordine dei punti in cui esse incontrano una a (o rispettivamente una b); in tal guisa i due fasci di linee a e b appariscono come due v_1.

Diremo talvolta che il fascio delle linee b è *riferito prospettivamente* ad una linea a, quando ogni linea b viene fatta corrispondere al suo punto d'incontro colla a; si ha così una corrispondenza biunivoca ordinata tra il fascio e la linea.

Diremo quindi che due linee a_1, a_2 sono riferite prospettivamente, se esse vengono riferite prospettivamente al fascio delle b; ecc.

Ci converrà pure di usare delle locuzioni di *destra* e *sinistra* per denotare uno degli ordini di una linea b, e quindi di tutte le altre, riferite prospettivamente ad essa; parimente ci converrà di usare le locuzioni di *alto* e *basso* per denotare uno degli ordini sopra le linee a. Così il lettore potrà aiutare l'immaginazione raffigurandosi la F come un piano verticale, su cui le linee b sieno le orizzontali, e le a le verticali.

Fissate le cose nel modo anzidetto, se si prendono su F due punti P, P' i quali non si trovino su una stessa a o b, l'uno di essi si dovrà dire a destra dell'altro, e così pure l'uno dei due sarà più alto dell'altro.

Tutti i punti di F che sono a sinistra, ovvero a destra (dei punti) di una data a, costituiscono una superficie (parte di F) soddisfacente alle medesime condizioni 1) 2) 3) poste in principio.

Lo stesso si dica dei punti che sono più alti, ovvero più bassi, di quelli di una data b.

Se si prendono due linee a_1, a_2 del 1° fascio e due linee b_1, b_2 del 2°, queste 4 linee determinano una superficie (parte di F) costituita dei punti intermedi alle a_1, a_2 e alle b_1, b_2 (*superficie delimitata da* a_1, a_2, b_1, b_2).

Se si prende un punto P di F, ogni superficie, parte di F, delimitata da due linee a_1, a_2 e da due linee b_1, b_2, che contenga P, si dirà un *intorno* del punto P stesso.

Un gruppo di punti di F si dirà avere per *limite* un punto P, quando in ogni intorno di P cade qualche punto del gruppo.

Se tra due superficie (o varietà a due dimensioni) F, F' è data una corrispondenza biunivoca, questa corrispondenza si dirà *continua* quando a punti di F aventi per limite un qualsiasi punto P, corrispondono (su F') punti aventi per limite il punto P' che corrisponde a P, e viceversa.

Osservazione. — Date due superficie (o varietà a due dimensioni) F, F', in base alle sole ipotesi poste, non sappiamo porre tra di esse una corrispondenza biunivoca continua. In particolare non sappiamo porre in corrispondenza biunivoca continua i punti di F cogli elementi della varietà numerica a due dimensioni (xy).

3. Un gruppo di punti di F potrà essere ordinato in modo da

costituire, considerato in sè stesso, una linea l, nel senso del n° 1; ma non per questo esso dovrà considerarsi come una *linea continua sopra la superficie* F, tantochè un punto il quale sia limite di un gruppo di punti su l (n° 1) potrebbe non esser limite del medesimo gruppo di punti considerato sopra F (n° 2), o viceversa.

Così p. e., se la F è un piano (xy), e si uniscono i punti razionali di una sua retta $y = \text{cost.}$ coi punti irrazionali di una parallela, ordinando il gruppo ottenuto pei valori crescenti (o decrescenti) di x, si ottiene appunto una varietà ad una dimensione, che, riguardata in sè stessa, ha tutti i requisiti di una linea, ma che non appare più una linea continua relativamente al piano che la contiene.

Una varietà v_1 di punti della F (diversa dalle a, b) si definirà come una *linea elementare* (o, più brevemente, *linea*) *sopra la superficie* F, quando:

1) essa ha un punto comune con ogni a e con ogni b,

2) le linee a (o le b) che la incontrano secondo punti susseguentisi, si susseguono ugualmente nel loro fascio.

OSSERVAZIONE. — Una linea elementare è continua sopra la superficie, nel senso innanzi accennato.

Una linea l sopra F stabilisce una corrispondenza biunivoca ordinata tra i fasci delle a, b, ove si facciano corrispondere una a ed una b che s'incontrano su l.

Viceversa: data, tra i fasci di linee a e b, una corrispondenza biunivoca ordinata, il luogo dei punti comuni alle linee a, b corrispondenti, è una linea (elementare) sopra F.

Una linea l *sopra* F *divide la superficie in due parti,* vale a dire dà luogo ad una distribuzione dei punti di F, che non appartengono ad essa, in due classi.

Appartengono ad una parte i punti di F che sono *a destra di* l, cioè che si trovano a destra dell'intersezione di l colla b che passa per essi; appartengono all'altra parte i punti *a sinistra di* l.

In modo analogo la b divide la F in due parti, di punti *al di sopra* e *al di sotto di* l, cioè più alti o risp. più bassi delle intersezioni di l colle a passanti per essi. Ma *le due partizioni sono identiche;* così, se vi è p. e. un punto M il quale si trovi a sinistra e al disopra di l, ogni altro punto a sinistra di l sarà pure al disopra di essa e viceversa, onde anche ogni punto a destra di l sarà al disotto di essa.

Infatti, si denotino con M_1, M_2 le intersezioni di l risp. colle a, b passanti per M; e si fissi su l l'ordine $(M_1 M_2)$. Allora due punti P_1, P_2 di l si seguiranno in quest'ordine se P_2 è più alto e più a destra di P_1, e viceversa (cfr. la condizione 2). Se dunque P è un punto a sinistra di l, e sono P_1, P_2 le intersezioni di l risp. colla a e colla b per P, sarà P_2 a destra di P_1 e quindi più alto di esso; perciò anche P (che è alla stessa altezza di P_2) sarà più alto di P_1, ossia al di sopra di l. C. D. D.

4. *Se sopra F si hanno due linee l, l' ed esistono due punti P_1, P_2 di l', da parte opposta di l, le due linee hanno almeno un punto comune.*

Determiniamo su l una corrispondenza biunivoca $(P'P'')$ conducendo per ogni punto P di l' la a e la b che lo contengono, ad incontrare l risp. in P', P''. Questa corrispondenza biunivoca è ordinata perchè è il prodotto di due corrispondenze ordinate $(P'P)$ e (PP'').

Ora si considerino le coppie di punti omologhi $P'_1 P''_1$, $P'_2 P''_2$, che nascono dai punti P_1, P_2 di l'.

Fissato su l l'ordine $(P'_1 P''_1)$ avremo che, in quest'ordine, P'_2 consegue a P''_2. Infatti, se p. e. P_1 è al di sotto di l, e quindi più basso di P'_1, anche P''_1 è più basso di P'_1, mentre invece, P_2 essendo al di sopra di l, sarà P'_2 più basso di P_2 e quindi di P''_2.

Ciò posto, applicando la proposizione II del n° 1, si conclude che la corrispondenza $(P'P'')$ sopra l ha almeno un punto unito, il quale è comune ad l e l'.

5. Le proposizioni dei n[i] 3 e 4 costituiscono il fondamento delle proprietà di connessione di una superficie (aperta, semplicemente connessa), considerata in sè stessa. Esse mostrano quindi come la generazione di Riemann, precisata secondo il n° 2, permetta di svolgere le proprietà di connessione della superficie F. Ma tale svolgimento può esser fatto soltanto in via ipotetica, perchè nulla prova

che F debba contenere altre linee all'infuori di quelle costituenti i due fasci generatori. Occorre dunque introdurre all'uopo qualche *postulato esistenziale*. E noi cercheremo di introdurlo, conformandoci alla nozione intuitiva che la linea mobile generatrice può descrivere la superficie F in più modi diversi, dando luogo così a diversi fasci di traiettorie.

Osservazione.—La definizione di una superficie conforme alla generazione di Riemann presenta appunto questo difetto (che non si riscontra nella definizione analoga della linea), che essa pone a priori in evidenza alcuni sistemi di linee che non sono distinti in alcun modo sopra la superficie. Occorrerebbe pertanto di liberare la nozione della superficie dalla particolare scelta dei sistemi generatori, introducendo il concetto di *generazioni equivalenti* che nascono l'una dall'altra mediante corrispondenze biunivoche continue della superficie e conducono a fissare sempre nello stesso modo la divisione in parti della superficie stessa mediante una linea.

Noi non c'inoltreremo in questa via che ci condurrebbe lontano dallo scopo segnato alla presente ricerca.

6. Introduciamo il seguente postulato: *Sopra la superficie F esiste un (terzo) fascio di linee c, diverse dalle linee generatrici a, b.*

Secondo le definizioni precedentemente poste, avremo dunque:

1) una c ha un punto comune con ogni a o b;

2) i punti di una c sono ordinati come le a, e come le b, passanti per essi;

3) ogni punto di F appartiene ad *una* c.

Dall'ultima proprietà (che è quella per cui si dice che le c formano un fascio) segue che due c non hanno alcun punto comune, e quindi che tutti i punti dell'una sono da una stessa parte dell'altra (n° 4). Se ne trae la possibilità di ordinare (come intenderemo appunto di avere ordinato) il fascio delle c, in guisa che più c susseguentisi incontrino una a o una b in punti susseguentisi. Allora il fascio delle c (come già i fasci delle a e delle b) apparirà come una v_1.

7. Riferendo prospettivamente i fasci di linee c ed a, ad una

b, nasce per sezione, sopra un'altra b, una corrispondenza biunivoca ordinata π. Noi fisseremo nel fascio delle b una linea b_0, e studieremo le corrispondenze π che così si ottengono su di essa in relazione ad un'altra b variabile nel fascio. S'intenderà fissato il senso in cui tali operazioni π vengono compiute, usando il simbolo π^{-1} per denotare le inverse.

Allora vediamo che la determinazione di una corrispondenza π su b_0 dipende dalla scelta del corrispondente P_1 di un punto dato P, cosicchè si potrà usare della designazione

$$\pi = [P P_1].$$

Infatti la $b \equiv b_1$ che deve essere riferita prospettivamente ai due fasci di a e c è quella che passa pel punto P' intersezione delle a, c contenenti P e P_1.

Paragoniamo due corrispondenze π:

$$\pi_1 = [P P_1], \qquad \pi_2 = [P P_2],$$

nascenti risp. dalle linee b_1 e b_2 del fascio delle b; sia P' il punto di b_1 che dà origine a P, P_1, e P'' il punto di b_2 che dà origine a P, P_2.

I punti P, P', P'' si trovano sopra la a che passa per P, la quale è riferita prospettivamente alla b_0 mercè il fascio delle c, in guisa che gli omologhi dei punti nominati sono risp. P, P_1, P_2. Dunque, se P, P_1, P_2 si susseguono su b_0, anche P, P', P'' si seguiranno sulla a passante per P, e perciò si seguiranno pure le linee b_0, b_1, b_2 nel fascio delle b. Allora, preso su b_0 un altro punto M, ed i suoi corrispondenti M_1, M_2 in π_1 risp. π_2, anche M, M_1, M_2 si seguiranno su b_0, nello stesso ordine di P, P_1, P_2.

La relazione che si ha in tal caso fra π_1 e π_2 può essere espressa con

$$\pi_1 < \pi_2 \qquad\qquad (\pi_2 > \pi_1);$$

ed anche (tenuto conto dei simboli già introdotti) si potrà scrivere

$$[P P_1] < [P P_2], \quad [P P_2] = [M M_2]$$

$$[P P_1] < [M M_2].$$

Osservazione.—Applicando le designazioni di $=$ o $<$ ai segmenti della linea b_0, non si otterrebbe, come qualcuno potrebbe credere, una determinazione metrica astratta sopra b_1.

Invero, nelle ipotesi più generali, *le operazioni π non formeranno un gruppo*, sicchè p. e. dall'essere

$$[PP_1] = [MM_1]$$

$$[P_1 P_2] = [M_1 M_2],$$

non si potrà dedurre

$$[PP_2] = [MM_2],$$

e ciò sebbene i segmenti PP_2 e MM_2 appariscano come somme di PP_1, $P_1 P_2$ e risp. di MM_1, $M_1 M_2$.

8. Ripetendo su b_0 una corrispondenza π si dà origine alle corrispondenze biunivoche ordinate π^2, π^3 ... π^n.

Indichiamo con P_1, P_2 ... P_n i corrispondenti di un punto P di b_0 risp. in π, π^2 ... π^n.

I punti P, P_1, P_2 ... P_n si seguono in un ordine di b_0, p. e. da sinistra verso destra. Tenendo fisso P, per ogni punto P_1 di b_0 resta determinato *un* punto P_n, e la corrispondenza univoca ω_n, che così si ottiene, è ordinata. Infatti, se prendiamo M_1 nel segmento PP_1, si avrà

$$[PM_1] < [PP_1],$$

quindi applicando π ad M_1 si ottiene un punto a destra di M_2 ($[M_1 M_2] = [PM_1]$), ma questo punto è a sinistra di P_2, sicchè M_2 è a sinistra di P_2; analogamente M_n è a sinistra di P_n. La cosa sussiste a fortiori se prendiamo M_1 a sinistra di P, poichè allora M_n è pure a sinistra di P, mentre (per ipotesi) P_n è a destra di esso.

Vogliamo ora dimostrare che *la corrispondenza univoca ordinata ω_n intercedente tra P_1 e P_n è invertibile e quindi* (n° 1) *è biunivoca.*

Il teorema sussiste evidentemente per ω_1 che è l'identità; noi lo supporremo provato per ω_{n-1} e lo proveremo per ω_n.

Or dunque, preso su b_0 un punto P_1 si costruisca il punto P_{n-1} che gli corrisponde in ω_{n-1}.

Designata con a_0 la a passante per P, la si riferisca prospettivamente alla b_0 mercè il fascio delle c, e si designi con P' l'omologo di P_1; dopo ciò si riferiscano prospettivamente la a_0 al fascio delle b, e la b_0 al fascio delle a, riguardando quindi come omologhe le b, a che passano risp. per P', P_{n-1}. Al variare di P_1 (e quindi di P', P_{n-1}) si ottiene così fra i due fasci una corrispondenza biunivoca ordinata, onde il luogo dei punti d'intersezione delle linee omologhe è una linea l sopra la superficie (n° 3).

Questa l passerà evidentemente per P.

Consideriamo ora una c la quale seghi b_0, a_0 risp. nei punti M_1, M'. Se p. e. M_1 è a destra di P e quindi di l, si può provare che M' è a sinistra di l. Invero M_{n-1} (omologo di M_1 in ω_{n-1}) è a destra di M_1 e quindi di P, onde l'intersezione della a che passa per esso colla b per H' è a destra di H'; ma questa intersezione è l'intersezione di l colla b passante per H', dunque H' è a sinistra di l. C. D. D.

Da ciò segue (n° 4) che una c incontra sempre la l.

Si consideri ora, sopra b_0, la corrispondenza

$$\pi_{n-1} = \omega_n \omega_{n-1}^{-1} \qquad (\pi_0 = \pi)$$

che intercede tra i punti P_{n-1} e P_n. Essa è intanto univoca, ordinata. Il corrispondente di P_{n-1} si ottiene conducendo la a che passa per esso ad incontrare in P'_{n-1} la l, e conducendo la c che passa per P'_{n-1} ad incontrare b_0 in P_n.

Siccome ogni c incontra b, queste operazioni sono invertibili, onde π_{n-1} è una corrispondenza biunivoca. Si conclude dunque che è biunivoca la corrispondenza

$$\omega_n = \pi_{n-1}\, \omega_{n-1}. \qquad \text{C. D. D.}$$

In seguito al teorema dimostrato, dati su b_0 i punti P e P_n esistono sempre, nel loro segmento, $n-1$ punti, ben determinati, susseguentisi, P_1, P_2 ... P_{n-1}, per modo che

$$[P P_1] = [P_1 P_2] = \dots = [P_{n-1} P_n].$$

I punti P_1, P_2 ... P_{n-1} si potranno denominare *medi* n^{mi} *inseriti* tra P e P_n.

9. *Dati su* b_0 *i punti* P, P_1, *e dopo* P_1 *nell'ordine* $(P P_1)$, *sia p. e. a destra, un punto qualsiasi* M, *si può sempre scegliere un intero* n *così grande che la trasformazione* $[P P_1]^n$ *porti* P *in un punto* P_n *a destra di* M.

La dimostrazione (analoga ad un noto ragionamento del signor Stoltz) procede per assurdo, nel seguente modo.

Se l'enunciato è falso, i punti del segmento PM possono essere divisi in due classi secondochè vi è a destra di essi qualche punto P_n oppur no.

La partizione che così si ottiene soddisfa a tutti i requisiti per l'applicazione del postulato della continuità, onde esiste in PM un punto X a sinistra del quale si hanno tutti punti della prima parte, mentre il segmento XM (X compreso) è tutto costituito dai punti della seconda parte.

Prendasi ora un punto Y, entro il segmento PX, in modo che sia

$$[Y X] = [P P_1]$$

(per il che basta prendere

$$[X Y] = [P_1 P]),$$

il punto Y appartenendo alla prima parte, vi sarà a destra di esso, nel segmento YX, un punto P_n dedotto da P colla trasformazione $[P P_1]^n$. Ora applicando $[P P_1]$ ad Y si ottiene X, onde applicando $[P P_1]$ a P_n si otterrà un punto P_{n+1} a destra di X, il che costituisce un assurdo.

Così resta provato il teorema.

10. *Si abbiano su* b_0 *i punti* P, M, *ed entro il loro segmento i punti* A, B. *Per ogni intero* n, *si inseriscano tra* P *ed* M *i medi* n^{mi} M_1, M_2 ... M_{n-1}, *di guisa che*

$$[P M_1] = [M_1 M_2] = \ldots = [M_{n-1} M].$$

Si può trovare un numero m così grande che per $n > m$ qualcuno dei punti $M_1, M_2 \ldots M_{n-1}$ cada nel segmento AB.

Ragioneremo nelle ipotesi che M sia a destra di P, e B a destra di A.

Costruiamo il punto X per cui

$$[PX] = [AB],$$

e denotiamo con m il valore di un intero siffatto che il corrispondente di P in $[PX]^m$ cada a destra di M (n° 9). Se $n > m$ a fortiori il corrispondente di P in $[PX]^n$ cadrà a destra di M. Allora il corrispondente M_1 di M in ω_n^{-1} cadrà a sinistra di X, entro il segmento PX, onde

$$[PM_1] < [PX]$$

ossia

$$[PM_1] < [AB].$$

Ora si considerino i punti susseguentisi $M_1, M_2, M_3 \ldots M_{n-1}$. Se nessuno di essi cade nel segmento AB, avremo due punti consecutivi M_r, M_{r+1}, il primo a sinistra di A ed il secondo a destra di B. Si dedurrà quindi

$$[M_r M_{r+1}] > [M_r B]$$

$$[B M_r] > [BA],$$

da cui

$$[M_r B] > [AB]$$

$$[M_r M_{r+1}] > [AB].$$

Ma

$$[M_r M_{r+1}] = [PM_1],$$

onde

$$[PM_1] > [AB],$$

la qual relazione è contraddittoria a quella precedentemente trovata.

Così resta stabilito il teorema.

11. Al quale deve essere unito come complemento il seguente: *Se fra P ed M si prendono due punti H e K, e se l'intero m è determinato come al* n° 10, *di guisa che per $n > m$ qualcuno dei medi n^{mi} inseriti tra P ed M cada sempre nel segmento AB, interno ad HK, a fortiori qualcuno dei medi n^{mi} inseriti tra H e K cadrà sempre nel detto segmento AB.*

Prendasi infatti Y in guisa che sia

$$[HY] = [PX] = [AB],$$

allora, poichè $[PX]^n$ (per $n \geqq m$) porta P in un punto P_n a destra di M, $[HY]^n = [PX]^n$ porterà H in un punto H_n a destra di P_n, e quindi, a fortiori, a destra di K. Segue quindi dalla dimostrazione precedente che qualcuno dei medi n^{mi} fra H e K cadrà nel segmento AB.

12. Le proposizioni precedenti permettono di stendere, con continuità, la variabile numerica x sopra la linea b_0, cioè di porre una corrispondenza biunivoca ordinata (continua) fra i punti di b_0 e gli elementi della varietà numerica (x).

Fisseremo un punto P come punto o (origine) e stenderemo a destra di esso i valori (crescenti) della variabile positiva. Analogamente si potranno far corrispondere i valori negativi di x ai punti a sinistra di P.

Fissiamo, a destra di P, un'altro punto P_1 come punto 1, e mercè la ripetizione della corrispondenza $[PP_1]$ costruiamo i punti P_2, $P_3 \dots P_n \dots$ cui facciamo ordinatamente corrispondere i numeri $2, 3 \dots n \dots$.

Diremo che i punti

$$P \quad P_1 \quad P_2 \dots P_n \dots$$

costituiscono sopra b_0 la *1ª scala*. Inseriamo fra PP_1 il secondo medio $P_{\frac{1}{2}}$, in modo che

$$[P P_{\frac{1}{2}}] = [P_{\frac{1}{2}} P_1]$$

e facciamogli corrispondere il numero $\frac{1}{2}$. Analogamente inseriamo il 2° medio $P_{1+\frac{1}{2}}$ fra P_1 e P_2; ecc.

Tutti questi punti vengono rappresentati dai rispettivi indici ed insieme ai punti della 1ª scala costituiranno per noi la 2ª *scala.*

Ora inseriamo fra $P P_{\frac{1}{2}}$ i terzi medi $P_{\frac{1}{2.3}}$, $P_{\frac{2}{2.3}}$, e così fra $P_{\frac{1}{2}}$ e P_1 i terzi medi $P_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}}$, $P_{\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}}$; ecc.

Tutti questi punti vengono rappresentati dai rispettivi indici, e dànno luogo alla 3ª *scala.*

Procedendo, in modo analogo, si costruiranno i punti della n^{ma} scala, corrispondenti ai numeri della forma

$$r + \frac{r_2}{2!} + \frac{r_3}{3!} + \dots + \frac{r_n}{n!} \qquad (r_i < i),$$

e disposti su b_0 secondo l'ordine crescente di essi. I punti della n^{ma} scala comprendono tutti i punti delle precedenti scale.

Vogliamo provare che un punto H di b_0, il quale non appartenga alla n^{ma} scala considerata, per nessun valore (comunque grande) di n, è *limite* dei punti della detta scala al crescere di n, per modo che preso un qualsiasi segmento AB (intorno di H) che contenga H, in esso vi sono, per n assai grande, dei punti della scala n^{ma}.

Anzitutto (per il n° 9) si potrà trovare un punto P_{r+1} della prima scala, in modo che P_{r+1} sia a destra di H, e P_r a sinistra. Si potrà quindi supporre il segmento AB tutto contenuto in $P_r P_{r+1}$.

Ora si può determinare un numero m così grande, che, per $n > m$, qualcuno dei medi n^{mi}, inseriti tra P_r e P_{r+1}, cada entro il segmento AB (n° 10).

Ciò posto si consideri la $(n-1)^{ma}$ scala, e sieno P_s e P_{s+1} i punti consecutivi di essa che sono risp. a sinistra e a destra di H, i quali punti cadono certo tra P_r e P_{r+1}.

Inserendo fra P_s e P_{s+1} i medi n^{mi}, si otterranno tanti punti della scala n^{ma}, e (n° 11) qualcuno di questi dovrà cadere nel segmento AB. C. D. D.

Si aggiunga che il ragionamento precedente prova ancora come H sia limite dei punti della scala n^{ma} (al crescere di n) tanto a sinistra come a destra.

Dopo ciò si vede senz'altro come ad ogni punto H di b_0 (a destra di P) che non appartenga a nessuna scala, si possa far corrispondere un determinato numero irrazionale positivo definito da una serie

$$r + \frac{r_2}{2!} + \frac{r_3}{3!} + \frac{r_4}{4!} + \ldots$$

ove (per $n > 1$) r_n denota un intero positivo $< n$.

D'altra parte, ogni numero irrazionale positivo x può essere rappresentato con una serie della forma indicata; onde si ottiene fra i punti di b_0 (a destra e a sinistra di P) e i numeri x (positivi e negativi) una corrispondenza biunivoca ordinata. C. D. D.

13. Si consideri ora la a_0 passante per P e si distendano su di essa analogamente i valori d'una variabile numerica y. Si ottiene così di far corrispondere biunivocamente i punti della superficie F alle coppie di valori x, y, elementi della varietà numerica a due dimensioni (xy).

Questa corrispondenza è continua nel senso del n° 2. Così *i punti della F vengono rappresentati in modo continuo mediante due coordinate x, y.*

14. Volendo estendere le cose dette relativamente alle varietà a due dimensioni (v_2), alle varietà v_3 di tre dimensioni, cominceremo col definire una v_3 (i cui elementi sieno designati col nome di *punti*) come una classe di punti alla quale appartengono *tre* sistemi di *superficie* α, β, γ (n° 2) in modo che:

1) ogni punto di v_3 appartenga ad *una* α, ad *una* β e ad *una* γ (onde il nome di *fascio* dato a ciascuno dei tre sistemi);

2) una superficie α ed una β abbiano comune una *linea* c, la

quale abbia un punto comune con ogni γ, ed analogamente si dica per una α ed una γ e per una β e una γ;

3) se si considerano due linee c: c_1 e c_2, e sopra c_1 più punti susseguentisi, le γ che contengono questi punti incontrano la c_2 in tanti punti susseguentisi; analogamente si dica per due b o due a.

Osservazione. — Questo modo di definire la v_3 mediante *tre fasci generatori* di superficie, scaturisce dalla generazione di Riemann della v_3 mediante la variazione continua di una v_2, ove si tenga conto (oltrechè delle successive posizioni della v_2) anche delle superficie che vengono generate dalle linee dei due fasci generatori dati sopra la v_2.

Scaturisce quindi il concetto di punto limite d'un gruppo su v_3, e di rappresentazione continua di due v_3, l'una sull'altra.

Ora, *affinchè si possa rappresentare in modo continuo la v_3 definita innanzi sopra la varietà numerica* $(x\,y\,z)$, *basta ammettere che esista in v_3 un quarto fascio di superficie secanti le superficie α, β secondo linee* (n° 3), *e unisecanti le linee a, b, c mutue intersezioni di α, β, γ.*

Infatti, ammessa questa ipotesi, resta verificata l'ipotesi del n° 6 relativamente alle superficie α, β, e si possono quindi distendere i valori d'una variabile numerica sopra ciascuna delle linee a, b, c; onde ecc.

Dopo ciò è chiaro come il resultato si estenda a varietà aventi più di tre dimensioni.

15. Termineremo colla seguente osservazione.

Ritornando al caso di una superficie F, si supponga che essa sia un piano dello spazio definito rimpetto alla Geometria proiettiva, e si prendano in esso tre fasci di raggi coi centri A, B, C in linea retta; le corrispondenze π che si ottengono sopra le rette per A o per B, sono proiettività paraboliche collo stesso punto unito, onde (pel teorema fondamentale della proiettività) formano un gruppo. Colla semplificazione derivante da questa circostanza, il procedimento del n° 14 conduce così a porre nel piano un sistema di coordinate proiettive.

Analogamente si può operare nello spazio.

D'altronde ho avuto occasione di rilevare nell' « Appendice » delle mie « *Lezioni di Geometria proiettiva* » (*), come l'introduzione delle coordinate proiettive nello spazio si riattacchi immediatamente al teorema fondamentale che permette di riferire omograficamente due spazi proiettivi astratti, quali si possono riguardare lo spazio intuitivo (visivo) e lo spazio analitico avente come elementi i gruppi omogenei di 4 numeri.

È vero che la ordinaria dimostrazione di quel teorema deve qui essere modificata in un punto (**), e cioè dove si fà uso di una proiezione per riferire proiettivamente due rette; questo passaggio non sarebbe lecito trattandosi di due spazi astratti essenzialmente distinti. Ma, anche operando in ciascuno dei due spazi separatamente, due rette a, b di essi possono essere riferite proiettivamente, p. e. facendo corrispondere per isomorfismo due gruppi di proiettività paraboliche su di esse; ciò equivale, come è noto, a fissare sopra ognuna delle due rette (astratte) a, b, un punto *improprio,* e a riferire le a, b per proporzionalità di segmenti.

Il metodo indicato per l'introduzione delle coordinate proiettive presenta, sulle trattazioni consuete, specialmente questo vantaggio didattico: si risparmia la dimostrazione che l'equazione del piano è lineare, o meglio si identifica questa dimostrazione con quella relativa alla determinazione dell'omografia tra due spazi.

Bologna, maggio 1898.

FEDERIGO ENRIQUES.

(*) Bologna — ZANICHELLI, 1898.

(**) Su questo punto ho richiamato l'attenzione del lettore in una breve aggiunta alla errata-corrige del libro.